

2016 年更生日報盃數學大賽(第 12 屆) 高職三年級試題
(單選題共 25 題，每題 4 分，共計 100 分，答錯不倒扣)

※ 答案卡必須使用 2B 鉛筆畫記。

1. 設 $f(x)$ 為四次的多項式，若 $f(1)=f(2)=f(3)=5, f(4)=11, f(5)=77$ ，則 $f(0)=$ (A) 0 (B) -6 (C) 5 (D) 36 (E) 47

解：設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(ax+b)+5$ ，
 $f(4)=3 \times 2 \times 1 \times (4a+b)+5=11 \Rightarrow 4a+b=1$ ，
 $f(5)=4 \times 3 \times 2 \times (5a+b)+5=77 \Rightarrow 5a+b=3, \therefore a=2, b=-7$ ，
 即 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(2x-7)+5$
 $\Rightarrow f(0)=(-1)(-2)(-3)(-7)+5=47$ ，故選(E)

2. $\angle A$ 為銳角，且 $\tan^2 A - 3 \tan A - 4 = 0$ ，則 $\sin A =$
 (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{4}{\sqrt{17}}$ (C) 無解 (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{\sqrt{17}}$

解： $\tan^2 A - 3 \tan A - 4 = 0$
 $\Rightarrow (\tan A - 4)(\tan A + 1) = 0$
 $\Rightarrow \tan A = 4, \tan A = -1$ (不合)
 $\therefore \sin A = \frac{4}{\sqrt{17}}$ ，故選(B)

3. 設 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ，且 θ 為第二象限角，下列各值何者正確？

- (A) $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ (B) $\tan(\pi - \theta) = \frac{3}{4}$ (C) $\sec(\pi + \theta) = \frac{5}{3}$
 (D) $\cot(\pi + \theta) = -\frac{4}{3}$ (E) $\csc(\pi - \theta) = -\frac{5}{4}$

解： $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ， θ 在第二象限 $\therefore \cos \theta = -\frac{3}{5}$

- (A) $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ (B) $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta = \frac{4}{3}$
 (C) $\sec(\pi + \theta) = -\sec \theta = \frac{5}{3}$ (D) $\cot(\pi + \theta) = \cot \theta = -\frac{3}{4}$
 (E) $\csc(\pi - \theta) = \csc \theta = \frac{5}{4}$ ，故選(C)

4. 求 $\cos 240^\circ \sin 150^\circ + \cos 315^\circ \sin 225^\circ$ 的值 =
 (A) $-\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) 0 (E) 1

解：原式 $= \cos(180^\circ + 60^\circ) \sin(180^\circ - 30^\circ) + \cos(360^\circ - 45^\circ) \sin(180^\circ + 45^\circ)$
 $= -\cos 60^\circ \sin 30^\circ + \cos 45^\circ (-\sin 45^\circ)$
 $= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{3}{4}$ ，故選(C)

5. 二直線 $L_1: 2x + (a+3)y = 7$ ， $L_2: (a+3)x + 4(a+1)y = 5$ ，若 $a \neq -3$ ， L_1 與 L_2 垂直時， $a = ?$ (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) -2 (D) $-\frac{3}{2}$ (E) -4

解： $\frac{a+3}{2} \cdot \frac{4(a+1)}{a+3} = -1 \Rightarrow 2a+2 = -1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$ ，故選(D)

6. 已知直線 $L_1: 3x + y - 8 = 0$ ， $L_2: 3x - y + 2 = 0$ ， $L_3: y - 2 = 0$ 圍成 $\triangle ABC$ ，且 L_1 ， L_2 的交點為 A ，則 \overline{BC} 高的直線方程式為 (A) $x - 3y + 6 = 0$ (B) $x + y = 0$
 (C) $x + y - 1 = 0$ (D) $x - 1 = 0$ (E) $2x - y + 3 = 0$

解： $\begin{cases} L_1: 3x + y - 8 = 0 \\ L_2: 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 5 \Rightarrow A(1, 5)$

$\therefore B, C$ 兩點在 L_3 上 $\therefore \overline{BC}$ 上的高方程式 $x = 1$ ，故選(D)

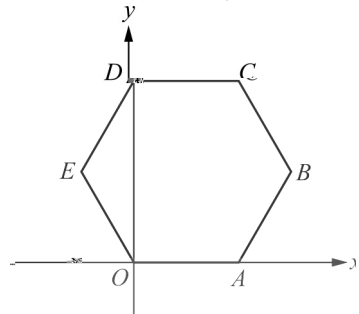
7. $\vec{a} = (6, 6)$ ， $\vec{b} = (5, 7)$ ， $\vec{c} = (2, 4)$ ，則下列選項何者代表兩向量平行？
 (A) $\vec{a} - \vec{c}$ 與 \vec{b} (B) $\vec{b} + \vec{c}$ 與 \vec{a} (C) $\vec{a} + \vec{b}$ 與 \vec{c}
 (D) $\vec{b} - \vec{c}$ 與 \vec{a} (E) 以上皆非

解：(A) $\vec{a} - \vec{c} = (6, 6) - (2, 4) = (4, 2)$ ， $\vec{b} = (5, 7) \therefore (\vec{a} - \vec{c}) \nparallel \vec{b}$
 (B) $\vec{b} + \vec{c} = (5, 7) + (2, 4) = (7, 11)$ ， $\vec{a} = (6, 6) \therefore (\vec{b} + \vec{c}) \nparallel \vec{a}$
 (C) $\vec{a} + \vec{b} = (11, 13)$ ， $\vec{c} = (2, 4) \therefore (\vec{a} + \vec{b}) \nparallel \vec{c}$
 (D) $\vec{b} - \vec{c} = (3, 3)$ ， $\vec{a} = (6, 6) \therefore \vec{a} = 2(\vec{b} - \vec{c}) \Rightarrow \vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ ，故選(D)

8. 已知 $\triangle ABC$ 及平面上一點 P ，若 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ ，則
 (A) P 在 $\triangle ABC$ 內部 (B) P 在 $\triangle ABC$ 外部 (C) P 在直線 AB 上
 (D) P 在 \overline{AC} 上 (E) 以上皆非

解： $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{PA}$
 $\therefore P$ 在 \overline{AC} 上，故選(D)

9. 如附圖， $OABCDE$ 為坐標平面上正六邊形，其中 O 為原點， A 點坐標為 $(2, 0)$ ，則向量 \overrightarrow{DE} 之坐標表法為



- (A) $(1, \sqrt{3})$ (B) $(-1, -\sqrt{3})$ (C) $(\sqrt{3}, 1)$ (D) $(-\sqrt{3}, -1)$
(E) $(-1, \sqrt{3})$

解： $\overrightarrow{OE} = 2(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ) = (-1, \sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{OD} = (0, 2\sqrt{3})$ ，
 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = (-1, -\sqrt{3})$ ，故選(B)

10. $\begin{cases} (m-1)x + 2y = -3 \\ 3x - (n+1)y = 6 \end{cases}$ 有無限多組解，則數對 $(m, n) =$
(A) $(3, -\frac{1}{2})$ (B) $(-\frac{1}{2}, 3)$ (C) $(\frac{1}{2}, 3)$ (D) $(\frac{1}{2}, -3)$ (E) $(-\frac{1}{2}, -3)$

解： $\frac{m-1}{3} = \frac{2}{-(n+1)} = \frac{-3}{6} \Rightarrow n=3, m=-\frac{1}{2}$ ，故選(B)

11. $\log_{10}x + a \log_x 10 = b$ ，甲看錯 a ，解得兩根為 100, 100，乙看錯 b ，解得兩根為 100 及 $\sqrt{1000}$ ，若正確之解為 α, β 且 $\alpha > \beta$ ， $\frac{\alpha}{\beta} = ?$

- (A) 100 (B) $\sqrt{1000}$ (C) 200 (D) 150 (E) 以上皆非

解：原式 $\Rightarrow \log_{10}x + \frac{a}{\log_{10}x} = b \Rightarrow (\log_{10}x)^2 - b \log_{10}x + a = 0$ ，

甲看錯 a ，得二根為 100, 100 $\Rightarrow b$ 正確，

$\therefore \log_{10}100 + \log_{10}100 = b$ ， $\therefore 2 + 2 = b \Rightarrow b = 4$ ，

乙看錯 b ，得二根為 100, $\sqrt{1000}$ $\Rightarrow a$ 正確，

$\therefore \log_{10}100 \times \log_{10}\sqrt{1000} = a$ ， $\therefore 2 \times \frac{3}{2} = a \Rightarrow a = 3$ ，

即原式為 $(\log_{10}x)^2 - 4 \log_{10}x + 3 = 0 \Rightarrow (\log_{10}x - 1)(\log_{10}x - 3) = 0 \Rightarrow \log_{10}x = 1$ 或 3，

$\therefore x = 10$ 或 $1000 \Rightarrow \alpha = 1000, \beta = 10 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 100$ \therefore 選(A)

12. 多項式 $f(x) = x^5 - 7x^4 - 58x^3 + 16x^2 - 460x - 250$ ，則 $f(12) =$
(A) -135 (B) -102 (C) -10 (D) 3 (E) 13

解： $f(12)$ 為 $f(x)$ 以 $x-12$ 除之的餘式 $\Rightarrow f(12) = -10$

$$\begin{array}{r|l} 1 & -7-58+16-460-250 \\ & 12+60+24+480+240 \\ \hline & 1+5+2+40+20, -10 \end{array}$$

故選(C)

13. 設 $A(-2, 1)$ ， $B(5, 4)$ ，點 P 在線段 AB 上且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 2$ ，則點 P 的坐標為
(A) $(2, 3)$ (B) $(\frac{11}{5}, \frac{14}{5})$ (C) $(\frac{12}{5}, \frac{13}{5})$ (D) $(\frac{7}{3}, \frac{10}{3})$
(E) $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$

解： $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$ ，設 $P(x, y)$

$$\Rightarrow (x+2, y-1) = \frac{3}{5}(7, 3)$$

$$\Rightarrow x = -2 + \frac{21}{5} = \frac{11}{5}, y = 1 + \frac{9}{5} = \frac{14}{5}$$
，故選(B)

14. 下列哪一個數最小？

- (A) $\frac{400}{511}$ (B) $\frac{622}{733}$ (C) $\frac{806}{917}$ (D) $\frac{889}{1000}$ (E) $\frac{1123}{1234}$

解： $\frac{400}{511} = 1 - \frac{111}{511}$ ， $\frac{622}{733} = 1 - \frac{111}{733}$ ， $\frac{806}{917} = 1 - \frac{111}{917}$ ， $\frac{889}{1000} = 1 - \frac{111}{1000}$ ，

$$\frac{1123}{1234} = 1 - \frac{111}{1234}$$
，因為 $\frac{111}{511} > \frac{111}{733} > \frac{111}{917} > \frac{111}{1000} > \frac{111}{1234}$ ，

$$\text{所以 } \frac{400}{511} < \frac{622}{733} < \frac{806}{917} < \frac{889}{1000} < \frac{1123}{1234}$$
，故選(A)

15. 設某沙漠地區某一段時間的溫度函數為 $f(t) = -t^2 + 10t + 11$ ，其中 $1 \leq t \leq 10$ ，則這段時間內該地區的最大溫差為

- (A) 9 (B) 16 (C) 20 (D) 25 (E) 36

解： $f(t) = -t^2 + 10t + 11 = 36 - (t-5)^2$

因 $1 \leq t \leq 10$ ，故當 $t=5$ 時有最大值 36；

當 $t=10$ 時有最小值 11

\Rightarrow 該地區的最大溫差為 $36 - 11 = 25$ ，故選(D)

16. 在職棒比賽中 ERA 值是了解一個投手表現的重要統計數值。其計算方式如下：若此投手共主投 n 局，其總責任失分為 E ，則其 ERA 值為 $\frac{E}{n} \times 9$ 。有一位投手在之前的比賽中共主投了 90 局，且這 90 局中他的 ERA 值為 3.2。在最新的一場比賽中此投手主投 6 局無責任失分，則打完這一場比賽後，此投手的 ERA 值成為
- (A) 2.9 (B) 3.0 (C) 3.1 (D) 3.2 (E) 3.3

解：由題意知 ERA 的值為 $\frac{E}{n} \times 9$ ，故 $3.2 = \frac{E}{90} \times 9 \Rightarrow E = 32$ ，若這位投手再主投 6 局無失分，那麼他的 ERA 為 $\frac{32}{96} \times 9 = 3$ ，故應選(B)

17. 投擲一般子四回，出現的點數依次為 a, b, c, d ，若在直角坐標平面上有兩點 $P(a, b), Q(c, d)$ ，若 P, Q 兩點的距離為 0 的機率為
- (A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{5}{54}$ (C) $\frac{65}{81}$ (D) $\frac{85}{162}$ (E) $\frac{25}{324}$

解： $x^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$ ，若 $x=0 \Rightarrow a=c, b=d \Rightarrow 6 \times 6 = 36$ (種)
 機率為 $\frac{6^2}{6^4} = \frac{1}{36}$ ，所以選(A)

18. 從 1 至 1000 的自然數中，數字裡有 2 且有 5 的數（例：525 算一個）有
- (A) 50 (B) 51 (C) 52 (D) 53 (E) 54 個

解：

①不含「0」

(A) $\square\square \Rightarrow 2$ ，

(B) $\square\square\square \Rightarrow 7 \times 3! = 42$ ，

$\uparrow \quad 2 \quad 5$

7 種

②含「0」

$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 0 \\ \hline \end{array} \downarrow \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 0 & 5 \\ \hline \end{array} \downarrow \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \downarrow \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \downarrow \end{array} \right\} 4$

(C) $\left. \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 5 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3!}{2!} \times 2 = 6$

由①②可得，所求為 $2 + 42 + 6 + 4 = 54$ (個) \therefore 選(E)

19. 有 n 個數值，其算術平均數為 5，若再加上一數“14”，則算術平均數變為 6，則 $n =$ (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

解：由題意得 $\frac{5n+14}{n+1} = 6 \Rightarrow n = 8$ ，所以選(D)

20. 若將 1, 2, 3, 4, 5, 6 六個數字全取排成六位數，下列何者不正確？

(A) 4 的倍數有 192 個

(B) 6 的倍數有 360 個

(C) 大於 600000 的六位數有 120 個

(D) 小於 600000 的六位數有 610 個

(E) 若所有六位數的總和為 $m \times (10^6 - 1)$ ，則 $m = 280$

解：(A) \circ ：末二位數為 4 的倍數 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64

$8 \times 4! = 192$ (種)

(B) \circ ：六個數字總和為 21，所以無論如何排列均是 3 的倍數，所以若又是偶數，即為 6 的倍數 $3 \times 5! = 360$ (種)

(C) \circ ：大於 600000 $6 \square \square \square \square \square 5! = 120$ (種)

(D) \times ：小於 600000 $6! - 120 = 600$ (種)

(E) \circ ： $(1+2+3+4+5+6) \times 5! \times 111111 = 21 \times 120 \times 111111 = 280 \times 999999 = 280 \times (10^6 - 1)$ ，故選(D)

21. 若 a, b, c 成等比數列，則二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形與 x 軸的交點數為：

(A) 0 個 (B) 1 個 (C) 2 個 (D) 3 個 (E) 無法確定

解： $\because ax^2 + bx + c = 0$ 之判別式 $D = b^2 - 4ac$ ，又 $\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = ac > 0$

$\therefore b^2 - 4ac = ac - 4ac = -3ac < 0 \Rightarrow$ 無交點，故選(A)

22. λ 為實數，方程式 $x^2 + 2\lambda x + 4\lambda - 3 = 0$ 有兩實根的條件為

(A) $\lambda \geq 2$ (B) $\lambda \geq 1$ (C) $\lambda \geq 0$ (D) $\lambda \geq -1$ (E) 以上皆非

解： $D = 4\lambda^2 - 4(4\lambda - 3) \geq 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 \geq 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 1) \geq 0$
 $\Rightarrow \lambda \geq 3$ 或 $\lambda \leq 1$ ，故選(E)

23. $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2047$ ，則 $n =$

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

解： $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = \frac{1(2^{n+1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 = 2047$
 $\Rightarrow 2^{n+1} = 2048 = 2^{11} \Rightarrow n + 1 = 11 \Rightarrow n = 10$ ，故選 (B)

24. 甲、乙、丙三人一起猜拳（剪刀、石頭、布）時，只有甲得勝之機率為

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{27}$ (E) $\frac{2}{27}$

解： $n(U) = 3^3 = 27$ ，且依甲、乙、丙出拳順序，

甲得勝的情形有（剪刀、布、布），（石頭、剪刀、剪刀），（布、石頭、石頭）

三種，故甲得勝之機率為 $\frac{3}{3^3} = \frac{1}{9}$ ，所以選(C)

25. 若點 $(a+1, a)$ 為不等式組 $\begin{cases} 6x-7y+12>0 \\ 2x-y-4<0 \\ 2x+3y+4>0 \end{cases}$ 所表示區域內的點，則 a 之範圍為

何？ (A) $a > -1$ (B) $0 < a < 4$ (C) $-\frac{6}{5} < a < 2$ (D) $-2 < a < 1$ (E) $a > 2$

解： \because 點 $(a+1, a)$ 在區域內

$$\therefore 6(a+1)-7a+12>0, 2(a+1)-a-4<0, 2(a+1)+3a+4>0$$

$$\Rightarrow a < 18, a < 2, a > -\frac{6}{5}, \text{得 } -\frac{6}{5} < a < 2, \text{所以選(C)}$$

～ 本試題結束 ～